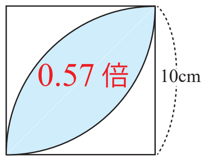
中学受験算数　図形のマジック

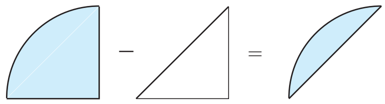
■ 0.57 倍と 1.57 倍

1. 木の葉形

右の図の木の葉形の面積は正方形の面積の 0.57 倍です。
ただし，円周率が 3.14 のときしか使えません。
右の図では，$10 \times 10 \times 0.57 = 57(\mathrm{cm}^2)$ となります。



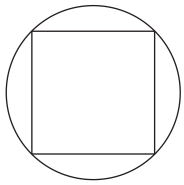
一般的な求め方は，$\frac{1}{4}$ のおうぎ形から三角形を引くと木の葉形の $\frac{1}{2}$ の弓形の面積が求められるのでこれを 2 倍します。



$(10 \times 10 \times 3.14 \times \frac{1}{4} - 10 \times 10 \div 2) \times 2 = (78.5 - 50) \times 2 = 28.5 \times 2 = 57$

2. 円と正方形

右の図で，円の面積は正方形の面積の 1.57 倍です。



例題

(1) 右の図 1 の斜線部分の面積を求めなさい。ただし，円周率は .3.14 とします。

(立命館中)

(2) 右の図 2 は円の中に，1 辺 4cm の正方形がぴったりと入ったものです。斜線部分の面積を求めなさい。

(江戸川学園取手中)

図 1

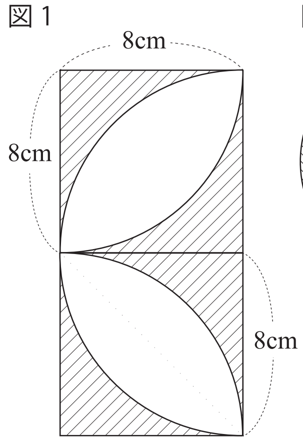
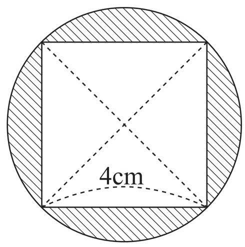


図 2



【解答】

(1) たて 16cm，横 8cm の長方形の面積から，木の葉形を 2 つ引けば求められます。

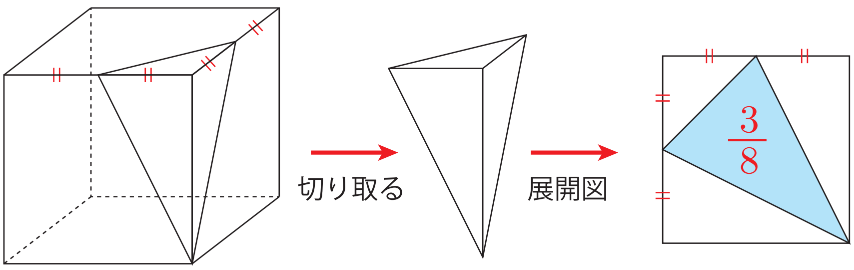
$16 \times 8 - 8 \times 8 \times 0.57 \times 2 = 128 - 72.96$

$= 55.04(\mathrm{cm}^2)\cdots$答

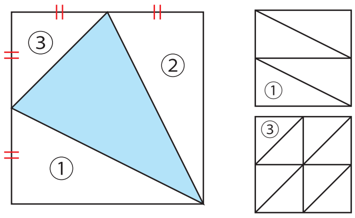
(2) 円の面積は，正方形の面積の 1.57 倍だから，
斜線部分の面積は正方形の，$1.57 - 1 = 0.57$ 倍。
$4 \times 4 \times 0.57 = 9.12(\mathrm{cm}^2)\cdots$答

■特別な三角すい・四角すい

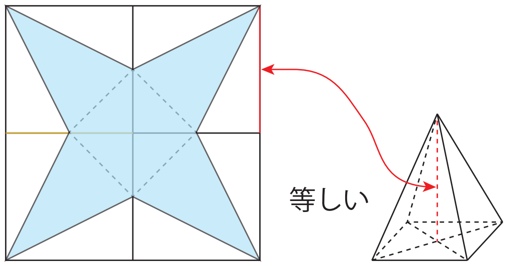
立方体の辺の中点 2 つと頂点を結ぶ平面で切り取ってできる三角すいの展開図で，青い三角形の面積は正方形の面積の $\frac{3}{8}$ になります。



①，②は正方形の面積の $\frac{1}{4}$，③は正方形の面積の $\frac{1}{8}$ だから，
青い三角形の面積は，
$1-\frac{1}{4}\times 2-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$



この三角すい 4 つでできる正四角すいの展開図は，右の図のようになり，正四角すいの高さは正方形の 1 辺の長さの $\frac{1}{2}$ となります。

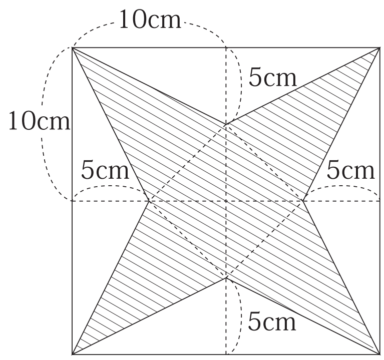


例題

右の図のような 1 辺 20cm の正方形の紙から，斜線部分を切り取り，四角すいをつくります。

(1) 側面の 1 つの三角形の面積は何 cm^2 ですか。

(2) この四角すいと同じ底面と高さの四角柱の体積は何 cm^3 ですか。 (同志社女子中)



【解答】

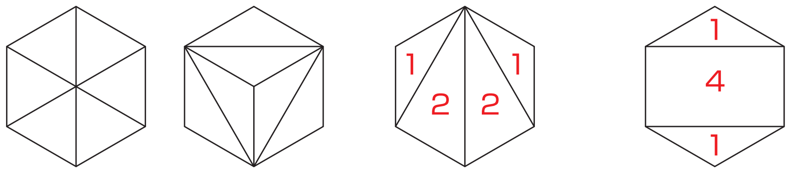
(1) 1 辺 10cm の正方形の面積の $\frac{3}{8}$ だから，

$10\times 10\times\frac{3}{8}=37.5(\mathrm{cm}^2)$…答

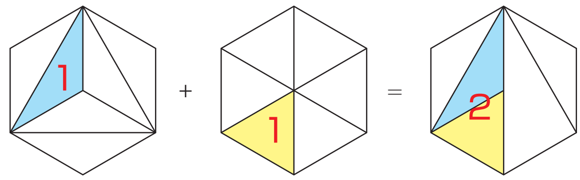
(2) この四角すいの高さは 10cm だから，$10\times 10\div 2\times 10=500(\mathrm{cm}^3)$…答

■正六角形の切断

① 6 等分　　② 1：2：2：1　　③ 1：4：1



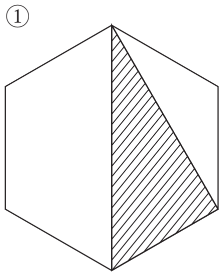
②は，右の図から 2 になることがわかります。
③は，正六角形の面積を 6 とすると，長方形は $6-1\times2=4$ となります。



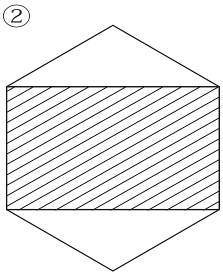
例題

面積が 12cm^2 の正六角形があります。この六角形の頂点を結んで作った，図形①，②の面積は，それぞれ何 cm^2 ですか。　(桐蔭学園中)

①



②



【解答】

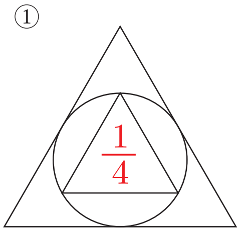
① 斜線部分は正六角形の面積の $\dfrac{1}{3}$ だから，

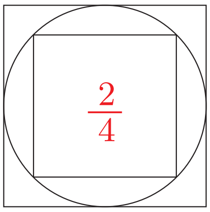
$12\times\dfrac{1}{3}=4(\text{cm}^2)$…答

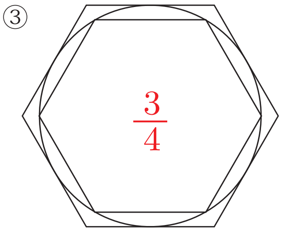
② 斜線部分は正六角形の面積の $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$ だから，

$12\times\dfrac{2}{3}=8(\text{cm}^2)$…答

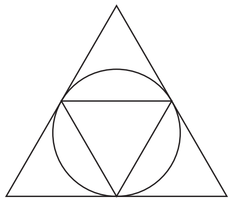
円に内接する図形と外接する図形の面積比

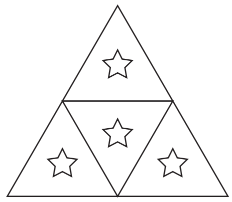
①


②


③


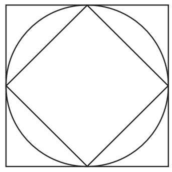
①は，中の正三角形を回転して，円を取り除けば $\frac{1}{4}$ となることがわかります。

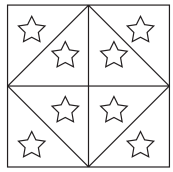

回転して


円を取り除くと

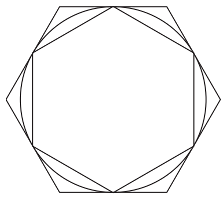
②は，中の正方形を回転して，円を取り除けば $\frac{2}{4}$ と

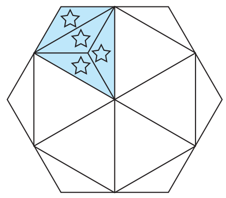
なることがわかります。


回転して


円を取り除くと

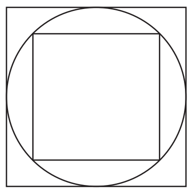
③は，中の正六角形を回転して，円を取り除き青い四角形の部分に着目すると，$\frac{3}{4}$ となることがわかります。


回転して

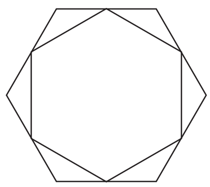

円を取り除くと

例題

(1) 右の図 1 のように 1 辺 10cm の正方形の内側で接している円と，その円周上に頂点がある正方形があります。内側の正方形の面積を求めなさい。 (同志社女子中)

図 1


(2) 右の図 2 のように，面積が 9cm^2 である正六角形 ABCDEF の各辺の中点を結んで新しい正六角形を作ります。新しい正六角形の面積を求めなさい。図の点 O は対称の中心です。 (開成中)

図 2


【解答】

(1) 外側の正方形の面積は，$10 \times 10 = 100(\text{cm}^2)$

内側の正方形の面積は外側の正方形の面積の $\frac{1}{2}$ だから，

$100 \times \frac{1}{2} = 50(\text{cm}^2)$…答

(2) 内側の正六角形の面積は，正六角形 ABCDEF の面積の $\frac{3}{4}$ だから，

$9 \times \frac{3}{4} = 6.75(\text{cm}^2)$…答

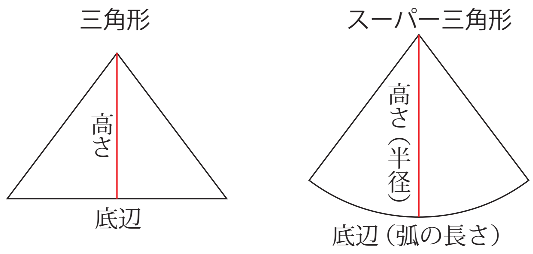
■スーパー三角形・スーパー台形

中心角が分かっているおうぎ形の面積は，

$半径 \times 半径 \times 3.14 \times \dfrac{中心角}{360}$

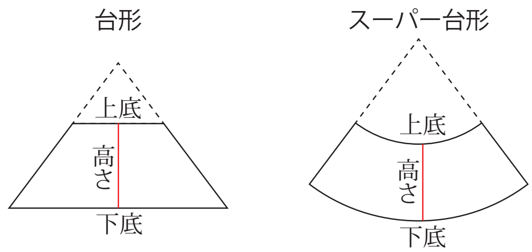
弧の長さがわかっているときは，三角形の面積の求め方と同様に，

底辺 (弧の長さ) × 高さ (半径) ÷ 2 で求めることができます。



同様に，おうぎ形からおうぎ形をくり抜いた図形，円すい台の側面の展開図の面積は，台形と同じ公式で

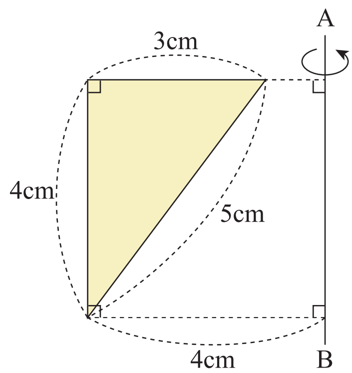
(上底 + 下底) × 高さ ÷ 2 で求めることができます。



例題

右の図の直角三角形を直線 AB を軸として 1 回転してできる立体の体積を求めなさい。

(慶應義塾中等部)



【解答】

回転すると右の図のようになり，

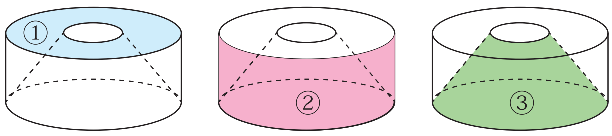
①は $4 \times 4 \times 3.14 - 1 \times 1 \times 3.14 = 15 \times 3.14$

②は $4 \times (2 \times 4 \times 3.14) = 32 \times 3.14$

③は $(2 \times 3.14 + 8 \times 3.14) \times 5 \div 2 = 25 \times 3.14$

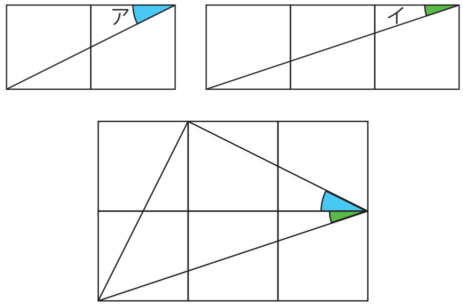
よって，表面積は，

$(15 + 32 + 25) \times 3.14 = 72 \times 3.14 = 226.08(\mathrm{cm}^2)$…答



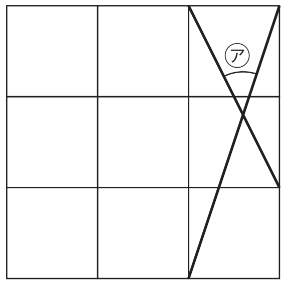
■ 1:2，1:3 のトンガリの角

右の図のような $1:2$ の長方形の対角線でできる角をア，$1:3$ の長方形の対角線でできる角をイとすると，ア + イ $= 45°$ となります。
右の図のように，$1:2$ を 2 つ，$1:3$ を 1 つ組み合わせると，直角二等辺三角形ができるので，ア + イ $= 45°$ となります。

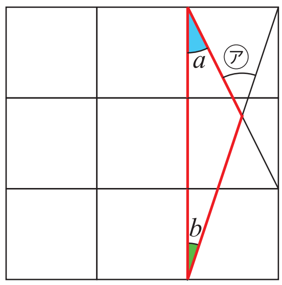


例題

右の図は，同じ正方形を 9 個並べて，1 つの大きな正方形をつくったものです。図のように 2 つの直線が交わっているとき，㋐の角は何度ですか。
(筑波大学附属中)

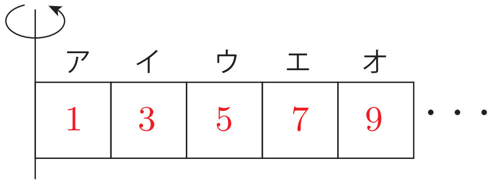


【解答】
角㋐は赤い三角形の外角なので，㋐$= a + b$ となります。
角 a は $1:2$ トンガリの角，角 b は $1:3$ トンガリの角だから，
㋐$= a + b = 45°$…答

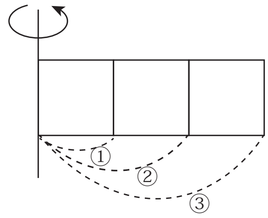


■回転体の体積比

正方形を回転してできる立体の体積比は，
ア：イ：ウ：エ：オ＝1 : 3 : 5 : 7 : 9⋯



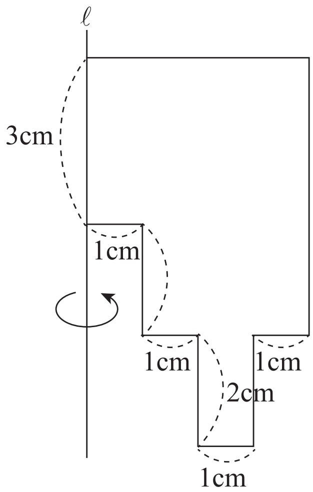
アとア＋イの長方形とア＋イ＋ウの長方形の半径の比は 1 : 2 : 3 だから，
底面積の比は，$(1\times1):(2\times2):(3\times3)=1:4:9$ となるので，
体積比は，$1:4:9$
体積比ア：イ：ウ＝$1:(4-1):(9-4)=1:3:5$ となります。



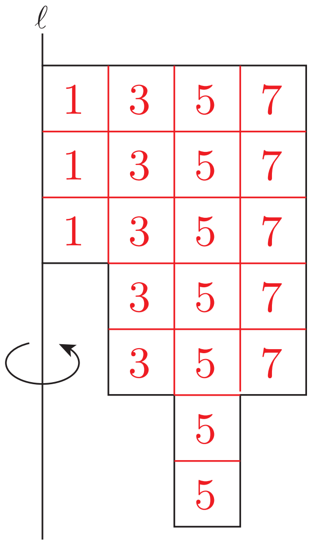
半径の比　1：2：3（相似比）
底面積の比　1：4：9
体積比　1：4：9
ア：イ：ウ　1：3：5

例題

右の図の図形を，直線 ℓ を軸として 1 回転させたときにできる立体の体積は何 cm^3 ですか。　(東洋英和中)



【解答】
右の図のように，1 辺 1cm の正方形に切り分けて，内側から 1，3，5，7 と入れていくと，
$1\times3+3\times5+5\times7+7\times5=88$ となり，1 辺 1cm の正方形を回転させてできる円柱の体積の 88 倍だから，
$1\times1\times3.14\times1\times88=276.32(cm^3)$⋯答

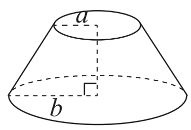


■円すい台の体積

右の図のような円すい台の体積は，

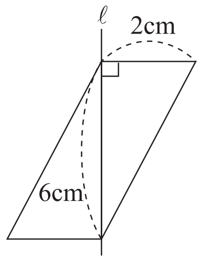
$\frac{1}{3} \times 3.14 \times (a \times a + a \times b + b \times b) \times$ 高さ

で求めることができます。



例題

右の図のような平行四辺形を直線 ℓ を軸に 1 回転させてできる立体の体積は何 cm^3 ですか。 (栄東中)



【解答】

回転すると，右の図のように円すい台を 2 つくっつけた立体になります。

下の円すい台の体積は，

$\frac{1}{3} \times 3.14 \times (1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 2) \times 3 = 21.98$

求める立体の体積は，$21.98 \times 2 = 43.96(\mathrm{cm}^3)$…答